

**INTERPOLASI NATURAL KUBIK SPLINE DAN INTERPOLASI KUBIK
SPLINE DALAM PENENTUAN KEBUTUHAN BENANG TAPIS LAMPUNG**

(Skripsi)

Oleh

Pipin Apriani



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019**

ABSTRACT

NATURAL CUBIC SPLINE INTERPOLATION AND CUBIC SPLINE INTERPOLATION IN DETERMINING THE NEEDS OF TAPIS LAMPUNG YARN

By

Pipin Apriani

This thesis presents a result of research on the use of two interpolation methods, namely Natural Cubic Spline and Cubic Spline, and their use in determining Tapis Lampung yarn requirements. Research is done using a literature study approach sourced from official books and journals. The results of the research conducted conclude that the Cubic Spline Interpolation method is more efficient than Natural Cubic Spline Interpolation because it spends a smaller number of threads in making the Tapis Lampung pattern

Keywords: *interpolation, cubic spline, natural cubic spline.*

ABSTRAK

INTERPOLASI NATURAL KUBIK SPLINE DAN INTERPOLASI KUBIK SPLINE DALAM PENENTUAN KEBUTUHAN BENANG TAPIS LAMPUNG

Oleh

Pipin Apriani

Skripsi ini menyajikan sebuah hasil penelitian tentang penggunaan dua metode interpolasi, yaitu Natural Kubik *Spline* dan Kubik *Spline*, serta pemakaiannya pada penentuan kebutuhan benang Tapis Lampung. Penelitian yang dilakukan ini menggunakan pendekatan studi literatur yang bersumber dari buku dan jurnal resmi. Hasil penelitian yang dilakukan mendapatkan kesimpulan bahwa metode Interpolasi Kubik *Spline* lebih efisien digunakan karena menghabiskan jumlah benang yang lebih sedikit dalam membuat pola Tapis Lampung

Kata kunci : *interpolasi, kubik spline, natural kubik spline.*

**INTERPOLASI NATURAL KUBIK SPLINE DAN INTERPOLASI KUBIK
SPLINE DALAM PENENTUAN KEBUTUHAN BENANG TAPIS LAMPUNG**

Oleh

PIPIN APRIANI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
Sarjana Sains

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019**

Judul Skripsi : **INTERPOLASI NATURAL KUBIK SPLINE
DAN INTERPOLASI KUBIK SPLINE
DALAM PENENTUAN KEBUTUHAN
BENANG TAPIS LAMPUNG**

Nama Mahasiswa : **Pipin Apriani**

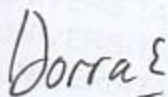
Nomor Pokok Mahasiswa : 1517031099

Jurusan : Matematika

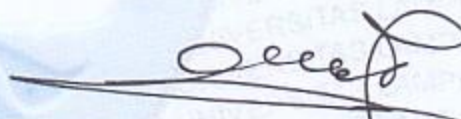
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing



Dra. Dorrah Aziz, M.Si.
NIP 19610128 198811 2 001



Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc.
NIP 19690213 199402 1 001

2. Ketua Jurusan Matematika

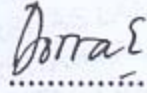


Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

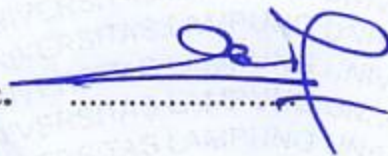
MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

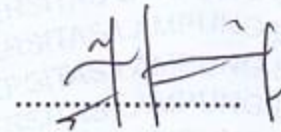
Ketua : **Dra. Dorrah Aziz, M.Si.**


.....

Sekretaris : **Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc.**


.....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.**


.....

2. a.n Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Wakil Dekan Bidang Akademik dan Kerjasama



Prof. Sutopo Hadi, M.Sc., Ph.D.
NIP. 19710415 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **23 Januari 2019**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama : **Pipin Apriani**

Nomor Induk Mahasiswa : 1517031099

Judul : **INTERPOLASI NATURAL KUBIK SPLINE
DAN INTERPOLASI KUBIK SPLINE DALAM
PENENTUAN KEBUTUHAN BENANG TAPIS
LAMPUNG**

Jurusan : **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Randa Lampung, 23 Januari 2019



Pipin Apriani
Pipin Apriani
NPM. 1517031099

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Sukanegeri, Gunung Labuhan, Way Kanan pada tanggal 03 Desember 1997. Penulis adalah anak pertama dari pasangan Bapak Suryadi dan Ibu Rustiana serta kakak dari Iin Indriani dan Whinda Noviyanti.

Penulis menyelesaikan pendidikan sekolah dasar (SD) pada tahun 2009 di SD Negeri Banjar Sakti Kecamatan Gunung Labuhan, Way Kanan. Pendidikan sekolah menengah pertama (SMP) di SMP Negeri 4 Bukit Kemuning, Lampung Utara pada tahun 2012, pendidikan sekolah menengah atas (SMA) di SMA Negeri 1 Bukit Kemuning, Lampung Utara pada tahun 2015. Penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa angkatan 2015 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Selama menjadi mahasiswa FMIPA penulis pernah bergabung di beberapa organisasi seperti Badan Eksekutif Mahasiswa (BEM) Universitas Lampung, Rohani Islam (ROIS) FMIPA Universitas Lampung, Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA), dan Ikatan Mahasiswa Lampung Utara (Ikam Lampura) dan beberapa Lembaga Pengembangan Diri. Pada Tahun 2018 penulis melaksanakan kerja praktik selama 40 hari di Badan Pusat Statistik (BPS) Bidang Produksi Provinsi Lampung.

KATA INSPIRASI

“persiapan sebelum memulai akan menyelamatkanmu dari penyesalan.”

(Ali bin Abi Thalib)

“Wahai orang-orang beriman! Bersabarlah kamu dan kuatkanlah kesabaranmu dan tetaplah bersiap siaga dan bertaqwalah kepada Allah agar kamu beruntung.”

(Q.S. Ali Imran : 200)

“Perbanyaklah proses karena hasil akan mengikuti.”

(Ali bin Abi Thalib)

“Jadilah pribadi yang mengutamakan kebaikan agar kebaikan diutamakan bagi diri kita.”

(Jefferly Helianthusonfri)

“Barang siapa yang menolong kesusahan orang muslim, maka Allah ta'ala akan menolongnya dari kesusahan pada hari kiamat.”

(HR. Bukhari)

PERSEMBAHAN

Dengan segala kerendahan hati dan rasa syukur, aku persembahkan karya kecil ku ini dengan penuh cinta untuk-Mu ya Allah, yang selalu memberikan rahmat dan hidayah sehingga skripsi ini dapat diselesaikan.

Untuk ibu dan bapak yang selalu memberikan dukungan, kasih sayang, dan tempat istimewa di hati kalian, yang selalu memberikanku motivasi untuk tetap semangat dalam melakukan segala aktivitas, serta adik-adikku Iin Indriani dan Whinda Noviyanti yang selalu memberikan do'a dan semangat serta setia menunggu atas keberhasilanku.

Kepada teman-temanku, yang telah memberi warna indah di setiap langkah juangku, yang tak pernah henti memberi dorongan dan arahan.

Ku persembahkan karya ini untuk kalian...

SANWACANA

Puji syukur penulis ucapkan kehadiran Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan penulisan tugas akhir sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana sains di Universitas Lampung ini. Shalawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada junjungan kita Nabi Muhammad SAW, penuntun jalan bagi seluruh umat manusia. Diselesaikannya penulisan skripsi yang berjudul “Interpolasi Natural Kubik Spline dan Interpolasi Kubik Spline dalam Penentuan Kebutuhan Benang Tapis Lampung” ini tidak terlepas dari doa, bimbingan, dukungan serta saran dari berbagai pihak yang telah membantu. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Dra. Dorrah Aziz, M.Si., selaku dosen pembimbing utama yang telah meluangkan waktu untuk membimbing, mengarahkan, dan memotivasi penulis sehingga skripsi ini dapat diselesaikan.
2. Bapak Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc., selaku dosen pembimbing kedua yang telah memberikan pengarahan dalam proses penyusunan skripsi ini.
3. Ibu Dr. Asmiati, S.Si., M.Si., selaku dosen penguji atas kritik dan saran yang membangun untuk skripsi ini.

4. Bapak Drs. Eri Setiawan, M.Si., selaku Pembimbing Akademik yang telah membimbing penulis selama mengikuti perkuliahan di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung
5. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.
7. Dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung yang telah memberikan ilmu serta bantuan kepada penulis.
8. Ibu, bapak dan adik-adik tercinta yang selalu mendoakan dan menyemangatkan.
9. Sahabat-sahabat tersayang, Rahma, Resti, Sekar, Dinda, Rima dan Loves yang selalu memberikan canda tawa dan warna indah dari awal perkuliahan.
10. Sahabat Terbaikku Monica Awanda terima kasih telah hadir dan selalu sabar dalam mendengarkan keluh kesah dan mengerti dalam segala keadaan. Terima kasih karena selalu menjadi pendengar yang baik.
11. Teman-teman geng sebelah. Tirai, Thalia, Anggun dan Nurah yang selalu memberikan warna indah dan selalu menebarkan kebahagiaan.
12. Teman-teman seperjuangan, Tina, Riska, Kasop, Duta, Yunis dan Vera yang selalu memberikan semangat dan dukungan.
13. Teman-teman terhebat Suci, Bunga, dan Panji yang selalu setia dari SMP hingga saat ini memberikan semangat, motivasi dan canda tawa yang tidak ternilai harganya.

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

I. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang dan Masalah.....	1
1.2. Tujuan Penelitian	3
1.3. Manfaat Penelitian	4

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Sistem Persamaan Linear	5
2.2. Interpolasi	6
2.2.1. Interpolasi <i>Spline</i>	7
2.2.2. Interpolasi Polinomial.....	8
2.2.3. Interpolasi Kuadratik	10
2.2.3. Interpolasi Kubik	11
2.3. Metode Kubik <i>Spline</i>	12
2.3.1. Syarat Titik Ujung Kubik <i>Spline</i>	24
2.3.1.1. Kubik <i>Spline</i>	24
2.3.1.2. Natural Kubik <i>Spline</i>	26

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1. Waktu dan Tempat Penelitian.....	27
3.2. Metode Penelitian	27

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1. Interpolasi Kubik <i>Spline</i>	29
4.1.1. Hasil Perhitungan Interpolasi Kubik <i>Spline</i>	34
4.2. Interpolasi Natural Kubik <i>Spline</i>	39
4.2.1. Hasil Perhitungan Interpolasi Natural Kubik <i>Spline</i>	40
4.3. Uji Pembahasan	45

V. KESIMPULAN

5.1. Kesimpulan	44
5.2. Saran.....	45

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR TABEL

Halaman

Tabel 4.1. Titik data antara x dan y	37
Tabel 4.2. Perhitungan Kubik <i>Spline</i>	40
Tabel 4.3. Titik data antara x dan y	43
Tabel 4.3. Perhitungan Natural Kubik <i>Spline</i>	46

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 4.1. Pola yang di Interpolasi	36
Gambar 4.2. Kurva Kubik <i>Spline</i>	41
Gambar 4.3. Kurva Natural Kubik <i>Spline</i>	47

I. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang dan Masalah

Kain tapis merupakan salah satu jenis kerajinan tradisional masyarakat Lampung, munculnya kain tapis ini ditempuh melalui tahap-tahap teknik tenun maupun ragam hias yang sesuai dengan perkembangan kebudayaan masyarakat. Kain tapis merupakan pakaian wanita suku Lampung yang terbuat dari tenun benang kapas, benang perak ataupun benang emas dengan sistem sulam. Dalam menyulam tapis lampung dibutuhkan jumlah benang yang tidak sedikit untuk menghasilkan pola tapis lampung yang sempurna sehingga diperlukan perhitungan yang optimal untuk dapat menentukan jumlah benang yang akan digunakan dalam membuat pola tapis lampung. Maka digunakan bidang ilmu matematika untuk mempermudah proses perhitungan.

Matematika merupakan salah satu bidang ilmu yang dekat dengan kehidupan manusia sehari-hari. Banyak persoalan di dunia nyata yang dapat direpresentasikan dalam bentuk persoalan matematika. Metode numerik merupakan cabang atau bidang ilmu matematika yang membahas mengenai masalah penaksiran nilai antara titik-titik data yang telah diketahui dan diformulasikan sedemikian rupa sehingga dapat diselesaikan menggunakan

metode pencocokan kurva. Fungsi-fungsi dalam pencocokan kurva mampu memecahkan berbagai persoalan mengenai penaksiran nilai antara titik-titik data yang telah tepat dan dinamakan dengan Interpolasi.

Ada beberapa jenis persoalan matematika yang dapat diselesaikan dengan menggunakan metode numerik. Salah satunya adalah persoalan Interpolasi polinom. Persoalan interpolasi polinom merupakan persoalan untuk mencari suatu polinom yang dapat menghubungkan sekumpulan titik yang diketahui. Interpolasi polinom sering digunakan untuk membantu menggambar kurva dari suatu hasil percobaan. Ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan interpolasi polinom. Salah satu bentuk penyelesaian interpolasi polinom adalah dengan menggunakan metode Interpolasi *Spline* Kubik (Munir, 2006).

Interpolasi *Spline* merupakan interpolasi sepotong-sepotong. Ini berarti bahwa suatu fungsi $f(x)$ tertentu pada selang $a \leq x \leq b$, jika ingin menghampiri $f(x)$ pada selang ini dengan sebuah fungsi lain $g(x)$. Fungsi $g(x)$ yang diperoleh ini dinamakan *Spline*. Nama *spline* sendiri diambil dari batang tipis yang telah digunakan sejak lama oleh para insinyur untuk mengepaskan kurva melalui titik tertentu. *Spline* sendiri terdiri dari 3 jenis, yaitu *spline* linear, *spline* kuadratik dan *spline* kubik. Dalam praktiknya, *spline* kubik yang lebih sering digunakan karena memberikan aproksimasi yang lebih dapat diterima. *Spline* adalah potongan-potongan fungsi yang kontinu pada tiap-tiap titik potongnya, selain Interpolasi *Spline* Kubik ada juga yang disebut Interpolasi Natural *Spline* Kubik. Pada Natural *Spline*

Kubik dinyatakan dengan melakukan linearisasi pada batas atas dan batas bawahnya untuk menghasilkan polinom interpolasi. Kemudian akan dibandingkan dengan polinom interpolasi dari Interpolasi Spline Kubik untuk mengetahui metode manakah yang lebih optimal untuk mendapatkan hasil dari penginterpolasian terhadap suatu titik tertentu. Oleh karena itu, penulis memilih Studi Banding antara Interpolasi Natural Kubik Spline dengan Interpolasi Kubik Spline dan di Aplikasikan dalam Penentuan Kebutuhan Benang Tapis Lampung sebagai judul penelitian.

1.2. Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah :

1. Membandingkan metode manakah dari Interpolasi Kubik Spline dan Interpolasi Natural Kubik Spline yang lebih optimal untuk menghitung nilai antara titik-titik data yang telah diketahui dari bentuk tapis Lampung.
2. Menghitung hasil penginterpolasian terhadap titik-titik data tersebut sehingga akan diketahui luas pola tapis Lampung yang akan diisi dengan benang.

1.3. Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Mengembangkan wawasan keilmuan dalam matematika terutama tentang Interpolasi Kubik Spline dan Interpolasi Natural Kubik Spline.
2. Dapat mengetahui lebih banyak materi tentang Interpolasi Kubik Spline dan Interpolasi Natural Kubik Spline.
3. Dapat memberikan informasi kepada pembaca bagaimana cara menentukan banyaknya benang yang digunakan dalam pembuatan tapis lampung menggunakan pemilihan metode antara Interpolasi Kubik Spline dan Interpolasi Natural Kubik Spline.
4. Mengembangkan pengetahuan dalam bidang terapan.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Sistem Persamaan Linear

Persamaan linier dalam n peubah $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah persamaan dalam bentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad (2.1)$$

Dimana $a_1, a_2, \dots, a_n$ dan b adalah konstanta-konstanta riil (Anton, 1988).

Sistem persamaan linier adalah sekumpulan persamaan yang secara bersama-sama menyajikan banyak variable bebas. Sistem persamaan linier disebut juga sebagai sistem persamaan linier simultan. Bentuk sistem persamaan linier dengan m persamaan dan n variabel bebas dapat ditulis sebagai :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \quad (2.2)$$

koefisien-koefisien sistem persamaan linier dapat dinyatakan dalam bentuk matriks $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

2.2. Interpolasi

Interpolasi merupakan proses pencarian dan perhitungan nilai suatu fungsi yang grafiknya melewati suatu kumpulan titik yang diberikan. Titik-titik tersebut mungkin merupakan hasil eksperimen dari suatu percobaan ataupun dari suatu fungsi yang telah diketahui. Fungsi interpolasi dapat dipakai dari sekelompok fungsi tertentu, diantaranya adalah fungsi polinomial.

Jika yang digunakan untuk melakukan interpolasi adalah fungsi polinomial maka polinomial tersebut dinamakan polinomial interpolasi (Munir, 2006). Polinomial interpolasi bergantung pada nilai-nilai dan banyaknya nilai x dan y yang diberikan.

2.2.1. Interpolasi *Spline*

Interpolasi *spline* digunakan karena interpolasi polinomial sering memberikan hasil yang kurang optimal, karena jika data yang diberikan banyak maka derajat polinomial yang terbentuk akan sangat tinggi, hal tersebut juga menyulitkan dalam perhitungan. Polinomial dengan derajat tinggi akan menghasilkan fluktuasi data yang sangat cepat. Perubahan data pada interval kecil dapat menyebabkan perubahan besar pada keseluruhan interval. Maka interpolasi biasanya menggunakan polinomial berderajat rendah.

Dengan melakukan pembatasan derajat maka dapat ditentukan alternatif lain untuk mendapatkan kurva mulus melalui sejumlah titik, yakni membagi suatu interval yang memuat data titik menjadi beberapa subinterval dan pada setiap subinterval disusun polinomial interpolasi. Hasilnya adalah sebuah kurva yang terdiri atas potongan-potongan kurva polinomial yang berderajat sama, fungsi tersebut disebut dengan fungsi *spline*.

Fungsi *spline* adalah suatu fungsi yang terdiri atas beberapa bagian fungsi polinomial yang di rangkaikan bersama dengan beberapa syarat kemulusan (Sahid, 2005).

Spline berderajat n

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) & \text{untuk } x_1 \leq x \leq x_2 \\ S_2(x) & \text{untuk } x_2 \leq x \leq x_3 \\ \vdots & \dots \\ S_{n-1}(x) & \text{untuk } x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases} \quad (2.4)$$

Dengan $S_k(x) = a_k x^n + a_{k-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $n = 1, 2, 3, \dots$ dan $k=1, 2, 3, \dots (n-1)$ (2.5)

Sebuah fungsi *spline* S berderajat n pada interval $[a, b]$ jika memenuhi syarat-syarat :

1. S terdefinisi pada $[a, b]$
 2. $S, S', S'', S''', \dots, S^{(n+1)}$ kontinu pada interval $[a, b]$
 3. Terdapat titik-titik x_k simpul-simpul *spline* $S(x)$ sedemikian sehingga $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ dan $S(x)$ merupakan suatu polinomial berderajat $\leq n$ pada setiap subinterval $[x_k, x_{k+1}]$
- (Sahid, 2005)

2.2.2. Interpolasi Polinomial

Andaikan di berikan n titik di bidang xy

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

yang akan diinterpolasikan dengan suatu kurva. Maka dapat diambil titik-titik berjarak sama dalam arah x , walaupun pada kasus lain nantinya dapat diperluas pada jarak yang tidak sama. Jika ditetapkan jarak bersama antara koordinat-koordinat x itu sebagai h , maka didapatkan

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \dots = x_n - x_{n-1} = h \quad (2.6)$$

Tetapkan $y_i = p_x(x_i)$ yang menyatakan kurva yang dicari, maka didapatkan nilai y_i berasal dari fungsi $f(x)$. Sedangkan $p_x(x_i)$ disebut sebagai fungsi hampiran terhadap $f(x)$.

Setelah polinomial interpolasi $p_x(x_i)$ ditemukan, maka $p_x(x_i)$ dapat dipergunakan untuk menghitung perkiraan nilai y di $x = a$ yaitu $p_x(a_i)$ bergantung pada letaknya, nilai $x = a$ mungkin terletak antara rentang data ($x_0 < a < x_n$) atau terletak pada rentang luarnya ($a < x_0$ atau $a > x_n$). Penginterpolasian dapat dilakukan dengan polinomial linier, polinomial kuadratik atau polinomial dengan derajat yang lebih tinggi sesuai dengan data yang tersedia.

Teorema 2.4.2.1

Jika (x_k, y_k) untuk $k = 1, 2, 3, \dots, n + 1$ adalah sebuah himpunan titik-titik yang mempunyai absis berlainan, maka terdapat tepat sebuah polinomial berderajat paling tinggi n yang melewati ke $n + 1$ titik tersebut (Sahid, 2005).

Misalkan $P_n(x)$ adalah polinomial berderajat paling tinggi n dan memenuhi

$$P_n(x_k) = y_k \text{ untuk } k = 1, 2, 3, \dots, (n+1) \quad (2.7)$$

Untuk menunjukkan bahwa P_n tunggal, maka dapat di andaikan, terdapat polinomial lain $Q_n(x_k)$ yang berderajat paling tinggi n , yang memenuhi

$$Q_n(x_k) = y_k \text{ untuk } k = 1, 2, 3, \dots, (n+1) \quad (2.8)$$

Kemudian didefinisikan

$$R(x) = P_n(x) - Q_n(x)$$

Karena derajat $P_n(x)$ dan $Q_n(x)$ adalah $\leq n$, maka derajat tertinggi $R(x)$ juga n Selanjutnya berlaku

$$R(x) = P_n(x) - Q_n(x) = y_k - y_k = 0 \quad \text{untuk } k=1,2,3,\dots,(n+1) \quad (2.9)$$

Maka dapat ditunjukkan bahwa $R(x)$ mempunyai $(n+1)$ akar yang berlainan, yakni $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$, padahal R berderajat $\leq n$. Maka hal tersebut dapat terjadi jika $R(x) \equiv 0$, yakni R berupa polinomial nol. Sehingga didapatkan $P_n(x) \equiv Q_n(x)$

2.2.3. Interpolasi Kuadratik

Misalkan diberikan tiga buah data $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ dan (x_3, y_3) polinomial yang menginterpolasi tiga buah titik tersebut berbentuk

$$P(x_1) = a_1 + a_2x_1 + a_3x_1^2 \quad (2.10)$$

Jika digambar maka kurva polinomial berbentuk parabola (Munir, 2006).

Polinom $P_n(x)$ ditentukan sebagai berikut :

$$P(x_1) = a_1 + a_2x_1 + a_3x_1^2$$

Subtitusikan (x_i, y_i) kedalam persamaan (2.13), $i = 1,2,3$. Maka didapatkan tiga buah persamaan dengan tiga buah parameter yang tidak diketahui a_1, a_2 dan a_3 .

$$y_1 = a_1 + a_2x_1 + a_3x_1^2$$

$$y_2 = a_1 + a_2x_2 + a_3x_2^2$$

$$y_3 = a_3 + a_2x_3 + a_3x_3^2$$

Persamaan tersebut dapat disebut sebagai sistem persamaan simultan, sehingga diperoleh bentuk matriksnya adalah :

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Maka a_1, a_2 dan a_3 dapat di hitung dengan metode invers matriks.

2.2.4. Interpolasi Kubik

Menurut Munir (2006), misalkan di berikan empat buah data $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ dan (x_4, y_4) , polinom yang menginterpolasi tiga buah titik tersebut berbentuk

$$P(x_1) = a_1 + a_2x_i + a_3x_i^2 + a_4x_i^3 \quad (2.12)$$

Polinom $P(x_1)$ ditentukan sebagai berikut :

Subtitusikan (x_i, y_i) ke dalam persamaan (2.12), $i = 1, 2, 3$. Maka didapatkan tiga buah persamaan dengan tiga buah parameter yang tidak diketahui a_1, a_2, a_3 dan a_4

$$Y_1 = a_1 + a_2x_1 + a_3x_1^2 + a_4x_1^3$$

$$Y_2 = a_1 + a_2x_2 + a_3x_2^2 + a_4x_2^3$$

$$Y_3 = a_1 + a_2x_3 + a_3x_3^2 + a_4x_3^3$$

$$Y_4 = a_1 + a_2x_4 + a_3x_4^2 + a_4x_4^3 \quad (2.13)$$

Persamaan tersebut dapat disebut sebagai sistem persamaan simultan, sebagaimana pada (2.3) maka matriks tersebut dapat diselesaikan dengan metode matriks invers ataupun OBE.

2.3. Metode Kubik Spline

Kubik *spline* adalah metode aproksimasi dengan melakukan interpolasi pada titik-titik x yang terletak diantara dua titik x_n dan x_{n+1} dengan mengasumsikan bahwa fungsi berbentuk polinomial berpangkat tiga. Sehingga berdasarkan persamaan (2.4) dan (2.5) maka didapatkan persamaan *spline* kubik atau *spline* berderajat tiga yang berbentuk :

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) & \text{untuk } x_1 \leq x \leq x_2 \\ S_2(x) & \text{untuk } x_2 \leq x \leq x_3 \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) & \text{untuk } x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\text{Dengan } S(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (2.15)$$

Dengan syarat-syarat :

1. $S(x) = S_i(x)$ terdefinisi pada subinterval $[x_i, y_i] i=1, 2, \dots, n$
2. $S(x)$ kontinu pada $[x_i, y_i]$
3. $S'(x)$ kontinu pada $[x_i, y_i]$

4. $S''(x)$ kontinu pada $[x_i, y_i]$

5. Terdapat titik-titik x_k (simpul-simpul $S(x)$) sedemikian sehingga $x_n = x_{i-1} <$

$$x_{i-2} < \cdots < x_i = x_1$$

Sehingga dapat dituliskan sebagai berikut :

$$S_1(x) = a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1; \text{ dengan } x_1 \leq x \leq x_2$$

$$S_2(x) = a_2(x - x_2)^3 + b_2(x - x_2)^2 + c_2(x - x_2) + d_2; \text{ dengan } x_2 \leq x \leq x_3$$

$\vdots$

$$S_{n-1}(x) = a_{n-1}(x - x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + c_{n-1}(x - x_{n-1}) + d_{n-1}$$

$$\text{dengan; } x_{n-1} \leq x \leq x_n \quad (2.16)$$

Koefisien-koefisien a_i, b_i, c_i , dan d_i harus ditentukan untuk mendapatkan $S(x)$ secara lengkap. Jika koefisien-koefisien ini dipilih sedemikian rupa sehingga $S(x)$ menginterpolasi n titik yang ditentukan pada bidang, maka $S(x)$, $S'(x)$, $S''(x)$ harus kontinu. Sehingga $S(x) = S(x_i)$ pada interval $x_1 \leq x \leq x_n$ dituliskan sebagai

$$S(x) = S_1(x) = a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1;$$

$$\text{dengan } x_1 \leq x \leq x_2$$

$$S(x) = S_2(x) = a_2(x - x_2)^3 + b_2(x - x_2)^2 + c_2(x - x_2) + d_2 ;$$

dengan $x_2 \leq x \leq x_3$

$\vdots$

$$S_{n-1}(x) = a_{n-1}(x - x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + c_{n-1}(x - x_{n-1}) + d_{n-1};$$

dengan $x_{n-1} \leq x \leq x_n$ (2.17)

Sehingga

$$S'(x) = S'_1(x) = 3a_1(x - x_1)^2 + 2b_1(x - x_1) + c_1; \text{ dengan } x_1 \leq x \leq x_2$$

$$S'(x) = S'_2(x) = 3a_2(x - x_2)^2 + 2b_2(x - x_2) + c_2; \text{ dengan } x_2 \leq x \leq x_3$$

$\vdots$

$$S'(x) = S'_{n-1}(x) = 3a_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + 2b_{n-1}(x - x_{n-1}) + c_{n-1}$$

dengan $x_{n-1} \leq x \leq x_n$ (2.18)

Dan

$$S''(x) = S''_1(x) = 6a_1(x - x_1) + 2b_1; \text{ dengan } x_1 \leq x \leq x_2$$

$$S''(x) = S''_2(x) = 6a_2(x - x_2) + 2b_2; \text{ dengan } x_2 \leq x \leq x_3$$

⋮

$$S''(x) = S''_{n-1}(x) = 6a_{n-1}(x - x_{n-1}) + 2b_{n-1}; \text{ dengan } x_{n-1} \leq x \leq x_n \quad (2.19)$$

Persamaan-persamaan tersebut dan sifat-sifat *spline* akan digunakan untuk menentukan koefisien-koefisien a_i, b_i, c_i, d_i untuk $i = 1, 2, \dots, n-1$ dalam bentuk koordinat-koordinat $y_1, y_2, \dots, y_n$. Karena dalam pernyataan ini $S(x)$ berupa pangkat tiga atau kubik, sebagaimana pernyataan tentang *spline* maka ada empat syarat yang akan dibuktikan untuk menentukan koefisien-koefisien a_i, b_i, c_i, d_i untuk $i = 1, 2, \dots, n-1$ dalam bentuk koordinat-koordinat $y_1, y_2, \dots, y_n$. yaitu :

1. $S(x)$ menginterpolasi titik-titik (x_i, y_i) $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Karena $S(x)$ menginterpolasi (melewati) titik-titik (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n-1$ didapatkan

$$S(x_1) = y_1, S(x_2) = y_2, \dots, S(x_n) = y_n \quad (2.20)$$

Dari $n-1$ persamaan yang pertama dari persamaan-persamaan ini dan (2.16) diperoleh

$$S_1(x) = a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1; \text{ dengan } x_1 \leq x \leq x_2$$

$$S_2(x) = a_2(x - x_2)^3 + b_2(x - x_2)^2 + c_2(x - x_2) + d_2; \text{ dengan } x_2 \leq x \leq x_3$$

⋮

$$S_{n-1}(x) = a_{n-1}(x - x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + c_{n-1}(x - x_{n-1}) + d_{n-1};$$

dengan $x_{n-1} \leq x \leq x_n$

Karena

$$S_1(x) = S(x_1) = a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1 = y_1 ;$$

dengan $x_1 \leq x \leq x_2$

$$S_2(x) = S(x_2) = a_2(x - x_2)^3 + b_2(x - x_2)^2 + c_2(x - x_2) + d_2 = y_2 ;$$

dengan $x_2 \leq x \leq x_3$

$\vdots$

$$S_{n-1}(x) = S(x_{n-1})$$

$$= a_{n-1}(x - x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + c_{n-1}(x - x_{n-1}) + d_{n-1} = y_{n-1} ;$$

dengan $x_{n-1} \leq x \leq x_n$

Maka didapatkan

$$d_1 = y_1$$

$$d_2 = y_2$$

$$d_{n-1} = y_{n-1} \tag{2.21}$$

Dari persamaan terakhir dalam persamaan (2.17), persamaan terakhir dalam (2.13)

$$y_n = S(x_n) = S_{n-1}(x)$$

$$= a_{n-1}(x - x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + c_{n-1}(x - x_{n-1}) + d_{n-1}$$

$$S_{n-1}(x) = a_{n-1}(x - x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + c_{n-1}(x - x_{n-1}) + d_{n-1}$$

Untuk $x_n - x_{n-1} = h$ dapat dituliskan

$$a_{n-1}h^3 + b_{n-1}h^2 + c_{n-1}h + d_{n-1} = y_n \quad (2.22)$$

2. $S(x)$ kontinu pada $[x_1, x_n]$

Karena $S(x)$ kontinu untuk $x_1 \leq x \leq x_n$ hal ini berarti bahwa pada masing-masing titik x_i dalam himpunan $x_2, x_3, \dots, x_n$ di dapatkan

$$S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i), i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (2.23)$$

Jika $S_{i-1}(x_i) \neq S_i(x_i)$, grafik-grafik $S_{i-1}(x_i)$ dan $S_i(x_i)$ tidak bertemu untuk membentuk kurva kontinu pada x_i , dengan menggunakan sifat penginterpolasi $S_{i-1}(x_i) = y_i$ maka didapatkan bahwa $S_{i-1}(x_i) = y_i, i = 2, 3, \dots, n-1$ atau akan didapatkan

$$S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i) = y_i, \quad i = 2, 3, \dots, n-1$$

$$S(x) = S_{n-1}(x)$$

$$= a_{n-1}(x - x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + c_{n-1}(x - x_{n-1}) + d_{n-1} = y_i;$$

dengan $x_{n-1} \leq x \leq x_n$

Dengan menggunakan pernyataan sebagaimana pada persamaan (2.22) maka didapatkan

$$a_1h^3 + b_1h^2 + c_1h + d_1 = y_2$$

$$a_2h^3 + b_2h^2 + c_2h + d_2 = y_3$$

$\vdots$

$$a_{n-2}h^3 + b_{n-2}h^2 + c_{n-2}h + d_{n-2} = y_{n-1} \quad (2.24)$$

3. $S'(x)$ kontinu pada $[x_1, x_n]$

Karena $S'(x)$ kontinu untuk $x_1 \leq x \leq x_n$ maka dapat ditentukan

$$S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i), \quad i = 2, 3, \dots, n-1$$

Dengan menggunakan sifat interpolasi dari persamaan (2.18)

$$S'(x) = S'_{n-1}(x)$$

$$= 3a_{n-1}(x - x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x - x_{n-1}) + c_{n-1} = c_n; \text{ dengan } x_{n-1} \leq x \leq x_n$$

Untuk $x_n - x_{n-1} = h$

$$3a_1h^2 + 2b_1h + c_1 = c_2$$

$$3a_2h^2 + 2b_2h + c_2 = c_3$$

⋮

$$3a_{n-2}h^2 + 2b_{n-2}h + c_{n-2} = c_{n-1} \quad (2.25)$$

4. $S''(x)$ kontinu pada $[x_1, x_2]$

Karena $S'(x)$ kontinu untuk $x_1 \leq x \leq x_n$, maka selanjutnya dapat ditentukan bahwa

$$S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i) \quad i = 2, 3, \dots, n-1$$

Atau dari persamaan (2.19) untuk $x_n - x_{n-1} = h$ di dapatkan

$$6a_1h + 2b_1 = 2b_2$$

$$6a_2h + 2b_2 = 2b_3$$

$$6a_{n-2}h + 2b_{n-2} = 2b_{n-1} \quad (2.26)$$

Untuk dapat menentukan a_i, b_i, c_i , dan d_i dengan mudah, maka dapat dilakukan dengan membentuk suatu sistem persamaan linier dengan menentukan pernyataan tambahan dalam bentuk

$$M_1 = S''(x_1), M_2 = S''(x_2), \dots, M_n = S''(x_n) \quad (2.27)$$

dengan besaran-besaran yang diketahui $y_1, y_2, \dots, y_n$ Misalnya, dari (2.19) didapatkan bahwa

$$M_1 = 2b_1$$

$$M_2 = 2b_2$$

$$M_{n-1} = 2b_{n-1}$$

Sehingga

$$b_1 = \frac{1}{2}M_1, b_2 = \frac{1}{2}M_2, \dots, b_{n-1} = \frac{1}{2}M_{n-1} \quad (2.28)$$

Juga telah di ketahui dari (2.21) bahwa $d_1 = y_1, d_2 = y_2, \dots, d_{n-1} = y_{n-1}$ Untuk menentukan nilai a_i maka ambil dari (2.26) sehingga didapatkan

$$6a_{n-2}h + 2b_{n-2} = 2b_{n-1}$$

$$6a_{n-2}h = 2b_{n-1} - 2b_{n-2}$$

$$a_{n-2} = \frac{M_{n-1} - M_{n-2}}{6h} \quad (2.29)$$

sehingga nilai c ditentukan dengan mensubstitusikan persamaan (2.21), (2.24), (2.28) dan (2.29) sebagai berikut :

$$a_{n-2}h^3 + b_{n-2}h^2 + c_{n-2}h + d_{n-2} = y_{n-1}$$

$$c_{n-2}h = y_{n-1} - (a_{n-2}h^3 + b_{n-2}h^2 + d_{n-2})$$

$$c_{n-2}h = (y_{n-1} - d_{n-2}) - (a_{n-2}h^3 + b_{n-2}h^2)$$

$$c_{n-2}h = (y_{n-1} - y_{n-2}) - (a_{n-2}h^3 + b_{n-2}h^2)$$

$$c_{n-2} = \frac{(y_{n-1} - y_{n-2})}{h} - \frac{(M_{n-1} - M_{n-2})h^3}{6h} + b_{n-2}h^2$$

$$c_{n-2} = \frac{(y_{n-1} - y_{n-2})}{h} - \frac{(M_{n-1} - M_{n-2})h^3}{6h} + \frac{6b_{n-2}h^2}{6}$$

$$\begin{aligned}
c_{n-2} &= \frac{(y_{n-1}-y_{n-2})}{h} - \frac{(M_{n-1}-M_{n-2})h^3}{6h^2} + \frac{3M_{n-2}h^2}{6h} \\
c_{n-2} &= \frac{(y_{n-1}-y_{n-2})}{h} - \frac{(M_{n-1}-M_{n-2})h}{6} + \frac{3M_{n-2}h}{6} \\
c_{n-2} &= \frac{(y_{n-1}-y_{n-2})}{h} - \frac{(M_{n-1}-M_{n-2})h+3M_{n-2}h}{6} \\
c_{n-2} &= \frac{(y_{n-1}-y_{n-2})}{h} - \frac{(M_{n-1}+2M_{n-2})h}{6}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Dari persamaan – persamaan (2.14), (2.21), (2.24), (2.28), (2.29) dan (2.30) maka didapatkan

Teorema 2.5.1.

Diberikan n titik $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ dengan $x_{i+1} - x_i = h, i=1, 2, 3, \dots, n-1$.

$$S(x) = \begin{cases} a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1 & x_1 \leq x \leq x_2 \\ a_2(x - x_2)^3 + b_2(x - x_2)^2 + c_2(x - x_1) + d_2 & x_2 \leq x \leq x_3 \\ \vdots & \\ a_{n-1}(x - x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + c_{n-1}(x - x_{n-1}) + d_{n-1} & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

Yang menginterpolasi titik-titik ini mempunyai koefisien-koefisien yang diberikan oleh :

$$a_i = (M_{i+1} - M_i)/6h$$

$$b_i = \frac{M_i}{2}$$

$$c_i = \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h} \right) - \left[\frac{(M_{i+1} + 2M_i)h}{6} \right]$$

$$d_i = y_i$$

$$\text{Untuk } i = 1, 2, \dots, n-1. \text{ Dimana } M_i = S''(x_i), i=1, 2, \dots, n. \quad (2.31)$$

(Anton, 1988).

Dari hasil ini, dapat di lihat bahwa besaran-besaran $M_1, M_2, \dots, M_n$ secara unik mempertemukan *spline* kubik. Untuk mencari besaran-besaran ini disubtitusikan bentuk a_i, b_i , dan c_i yang diberikan dalam (2.31) ke dalam (2.22) yaitu :

$$\frac{3(M_{n+1}-M_n)h^2}{6h} + \frac{2M_nh}{2} + \left(\frac{y_{n+1}-y_n}{h} - \frac{(M_{n+1}-2M_n)h}{6} \right) = \left(\frac{y_{n+2}-y_{n+1}}{h} - \frac{(M_{n+2}-2M_{n+1})h}{6} \right)$$

$$\frac{3(M_{n+1}-M_n)h^2}{6h} + \frac{2M_nh}{2} + \left(-\frac{(M_{n+1}-2M_n)h}{6} \right) + \frac{(M_{n+2}-2M_{n+1})h}{6} = \left(\frac{y_{n+2}-y_{n+1}}{h} - \frac{y_{n+1}-y_n}{h} \right)$$

$$\frac{3(M_{n+1}-M_n)h^2}{6h} - \frac{(M_{n+1}-2M_n)h}{6} + \frac{(M_{n+2}-2M_{n+1})h}{6} + \frac{2M_nh}{2} = \left(\frac{y_{n+2}-y_{n+1}}{h} - \frac{y_{n+1}-y_n}{h} \right)$$

$$\frac{3(M_{n+1}-M_n)h^2}{6h} - \frac{(M_{n+1}-2M_n)h}{6} + \frac{(M_{n+2}-2M_{n+1})h}{6} + \frac{6M_nh}{6} = \frac{y_{n+2}-2y_{n+1}+y_n}{h}$$

$$\frac{3(M_{n+1}-M_n)h^2}{6h} - \frac{(M_{n+1}-2M_n + M_{n+2}-2M_{n+1}+6M_n)h}{6} = \frac{y_{n+2}-2y_{n+1}+y_n}{h}$$

$$\frac{3(M_{n+1}-M_n)h^2}{6h} - \frac{(-M_{n+1} + 4M_n + M_{n+2})h}{6} = \frac{y_{n+2}-2y_{n+1}+y_n}{h}$$

$$\frac{3(M_{n+1}-M_n)h^2}{6h} - \frac{(-M_{n+1} + 4M_n + M_{n+2})h^2}{6h} = \frac{y_{n+2}-2y_{n+1}+y_n}{h}$$

$$\frac{(3M_{n+1}-3M_n)h^2}{6h} - \frac{(-M_{n+1} + 4M_n + M_{n+2})h^2}{6h} = \frac{y_{n+2}-2y_{n+1}+y_n}{h}$$

$$\frac{(-3M_n + 4M_n + 3M_{n+1} + M_{n+1} + M_{n+2})h^2}{6h} = \frac{y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n}{h}$$

$$\frac{(M_n + 4M_{n+1} + M_{n+2})h^2}{6h} = \frac{y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n}{h}$$

$$(M_n + 4M_{n+1} + M_{n+2}) = \frac{(y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n)6}{h^2} \quad (2.32)$$

Jika digerakkan $M_1, M_2, \dots, M_n$ didapatkan

$$M_1 + 4M_2 + M_3 = \frac{6}{h^2}(y_1 - 2y_2 + y_3)$$

$$M_2 + 4M_3 + M_4 = \frac{6}{h^2}(y_2 - 2y_3 + y_4)$$

.....

$$M_{n-2} + 4M_{n-1} + M_n = \frac{6}{h^2}(y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n) \quad (2.33)$$

Atau dalam bentuk matriks $\mathbf{AM} = \mathbf{y}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ \vdots \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ \vdots \\ y_{n-4} - 2y_{n-3} + y_{n-2} \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Matriks merupakan sistem linier dari $n-2$ persamaan, untuk n bilangan tertentu $M_1, M_2, \dots, M_n$. Agar didapatkan $M_1, M_2, \dots, M_n$ secara unik maka diperlukan dua persamaan tambahan. Alasannya adalah karena terdapat tak terhingga banyaknya *spline-spline* kubik

yang menginterpolasi titik-titik yang diberikan itu, sehingga belum mempunyai cukup syarat untuk menentukan *spline* kubik tunggal yang melalui titik-titik tersebut. Adapun syarat yang diinginkan juga disebut sebagai syarat titik ujung atau titik batas yang ditentukan sebagai berikut.

2.3.1. Syarat Kubik *Spline*

2.3.1.1. Kubik *Spline*

Syarat batas untuk kubik *spline* adalah :

$$M_1 = 2M_2 - M_3 \quad (2.35)$$

$$M_n = 2M_{n-1} - M_{n-2}$$

Disubstitusikan ke persamaan (2.33) maka didapatkan sistem linier $(n-2) \times (n-2)$ untuk M_2 , M_3 dan M_{n-1} yaitu

$$(2M_2 - M_3) + 4M_2 + M_3 = \frac{6}{h^2}(y_1 - 2y_2 + y_3)$$

$$M_2 + 4M_3 + M_4 = \frac{6}{h^2}(y_2 - 2y_3 + y_4)$$

$$M_{n-2} + 4M_{n-1} + (2M_{n-1} - M_{n-1}) = \frac{6}{h^2}(y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n)$$

Maka didapatkan

$$6M_2 + M_3 = \frac{6}{h^2}(y_1 - 2y_2 + y_3)$$

$$M_2 + 4M_3 + M_4 = \frac{6}{h^2}(y_2 - 2y_3 + y_4)$$

.....

$$6M_{n-1} = \frac{6}{h^2}(y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n) \quad (2.36)$$

Dalam bentuk matriks dituliskan sebagai :

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ \vdots \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Setelah menyelesaikan sistem persamaan linier untuk $M_2, M_3, \dots, M_{n-1}$ maka untuk menentukan M_1 dan M_n dapat digunakan

$$M_2 - M_1 = M_3 - M_2$$

$$M_1 - 2M_2 + M_3 = 0 \quad (2.38)$$

2.3.1.2. Natural Kubik *Spline*

Secara fisis (kurva) Natural Kubik *Spline* akan dapat dihasilkan jika kedua ujungnya bebas tanpa ada kendala diluar titik-titik interpolasi. Bagian ujung yang diluar titik-titik interpolasi akan ada pada garis lurus. Hal ini menyebabkan $S''(x)$ menjadi nol pada titik x_1 dan x_n . Sehingga menghasilkan syarat berupa :

$$M_1 = M_n = 0 \quad (2.39)$$

Jika disubstitusikan pada persamaan (2.33) maka didapatkan

$$\begin{aligned} 4M_2 + M_3 &= \frac{6}{h^2}(y_1 - 2y_2 + y_3) \\ M_2 + 4M_3 + M_4 &= \frac{6}{h^2}(y_2 - 2y_3 + y_4) \\ &\dots\dots\dots \\ M_{n-2} + 4M_{n-1} &= \frac{6}{h^2}(y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n) \end{aligned} \quad (2.40)$$

Dalam bentuk matriks ditulis sebagai :

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ \dots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ \vdots \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1. Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2018/ 2019 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam mencapai tujuan penelitian adalah studi pustaka, yaitu mengupayakan penyelesaian masalah penelitian melalui berbagai referensi berupa buku, jurnal, dan literatur lainnya yang berkaitan dengan konsep Aljabar Linear Terapan dan Interpolasi *Spline* Kubik. Adapun langkah-langkah penelitian ini adalah :

1. Mengobservasi konsep-konsep Interpolasi *Spline* Kubik dan Interpolasi Natural *Spline* Kubik.
2. Menganalisis data yang sudah ditentukan kemudian diperoleh beberapa permasalahan yang berkenaan dengan Interpolasi *Spline* Kubik dan Interpolasi Natural *Spline* Kubik.

3. Menganalisis dan merepresentasikan permasalahan dalam penginterpolasian nilai antara titik-titik data yang telah diketahui kemudian menyelesaikan permasalahan untuk mendapatkan bentuk dari penginterpolasian *spline* kubik dan natural *spline* kubik.

V. KESIMPULAN

5.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dikemukakan sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa terdapat perbedaan yang signifikan antara plot Interpolasi Natural Kubik *Spline* dengan Interpolasi Kubik *Spline*. Pada perhitungan plot dengan Interpolasi Kubik *Spline* terlihat hampir menyerupai dengan grafik aslinya. Dalam perhitungan jumlah benang yang akan digunakan dalam membuat pola tapis Lampung, pada Interpolasi Kubik *Spline* menghabiskan benang sebanyak 15.287 cm untuk membuat satu pola Tapis Lampung dengan luas 16 cm^2 sedangkan pada Interpolasi Natural Kubik *Spline* menghabiskan benang sebanyak 39.484 cm untuk membuat satu pola Tapis lampung dengan luas 16 cm^2 . Selain itu, pada Interpolasi Kubik *Spline* menghabiskan jumlah benang yang lebih sedikit dibandingkan dengan Interpolasi Natural Kubik *Spline* sehingga semakin sedikit jumlah benang yang digunakan maka keuntungan yang diperoleh akan lebih maksimal.

5.2. Saran

Skripsi ini telah membahas mengenai Interpolasi Kubik *Spline* dan Interpolasi Natural Kubik *Spline*. Ini merupakan bagian dari interpolasi, sebagai tindak lanjut pembaca dapat mengembangkan metode interpolasi lainnya. Diantaranya Interpolasi Newton, Interpolasi Polinomial dan Interpolasi Lagrange.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, Howard & Rorres, Chris. 1988. *Penerapan Aljabar Linier Elementer*. Erlangga : Jakarta.
- Cullen, Charles. G. 1992. *Aljabar Linier Dengan Penerapannya*. PT Gramedia Pustaka Utama : Jakarta.
- Edwin, J. Purcell & Ridgon, Varlberg. 1999. *Kalkulus*. Erlangga : Jakarta.
- Indra, M. 2015. Komparasi Metode Interpolasi Kubik Spline dengan Clamped Kubik Spline. *Jurnal Institut Teknologi Bandung*. 36(2): 227-232.
- Kartono. 2012. *Penerapan Diferensial Biasa Model Matematika Fenomena Perbahan*. Graha Ilmu : Yogyakarta.
- Munir, Rinaldi. 2006. *Metode Numerik*. Informatika Bandung : Bandung.
- Nugroho, Didit. B. 2011. *Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya*. Graha Ilmu : Yogyakarta.
- Sahid. 2005. *Pengantar Komputasi Numerik dengan MATLAB*. C.V Andi Offset : Yogyakarta
- Shepley, L. Ross. 1984. *Differential Equation*. John Wiley and Sons : New York.